¿Qué es la Matemática Financiera?
Se puede definir como una rama de las matemáticas que estudia el valor del dinero a través del tiempo.

¿Esto significa que el dinero cambia su valor en el tiempo?
Así es, se puede decir que una unidad monetaria tiene más valor hoy que en el futuro → Por **2** factores:

1. ***Inflación:*** La que produce un aumento nominal en el precio de las cosas y provoca con el tiempo que con la misma cantidad de unidades monetarias ya no puedan adquirir la misma cantidad de bienes.

2. ***Disponibilidad*****:** Si el dinero lo tengo hoy lo puedo utilizar, si lo voy a tener en un tiempo aún no lo puedo utilizar.

Debido a esto ***no podemos semejar sumas que estén valuadas en distintos momentos del tiempo***. Tendremos que contemplar este cambio de valor en el tiempo, "moverlo" hacia el futuro y/o pasado, utilizando los distintos elementos que componen a una operación financiera.

• *Operación financiera: son aquellas que producen una modificación cuantitativa del capital por el transcurso del tiempo.*

ELEMENTOS:

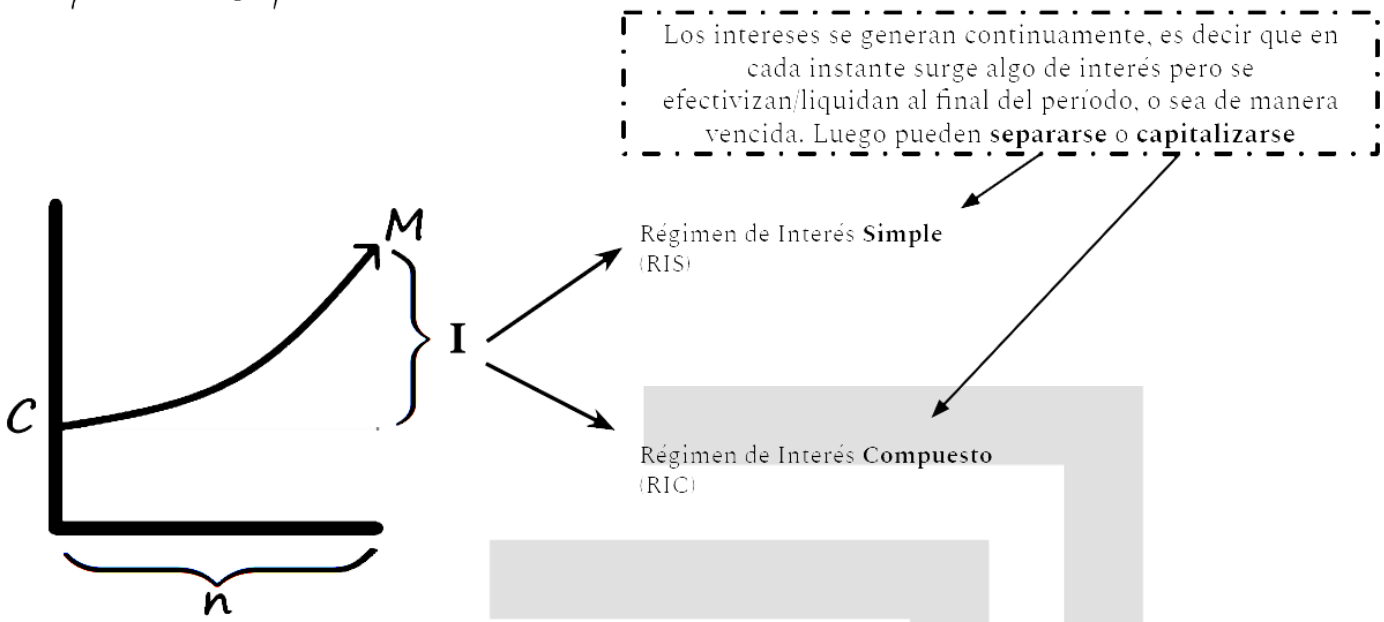
- ✓ ***Capital*** Conjunto de bienes destinados a la inversión. Puede ser en dinero o bienes, los que deberán ser valorizados en unidades monetarias. Valuado en moneda constante y se lo considera productivo.
- ✓ ***Tasa de interés*** Es el precio que se paga por la utilización de una unidad monetaria de capital en una unidad de tiempo determinada. Se expresa en decimal (%/100).
- ✓ ***Tiempo*** Cantidad de períodos transcurridos desde el inicio al final de la operación financiera. Se expresa en función del tiempo de la tasa de interés.
- ✓ ***Monto*** Resultado obtenido al final de la operación financiera (Capital + Intereses)

• Cuando vayamos hacia adelante en el tiempo serán *Inversiones* u *Operaciones de Capitalización*.
• Cuando vayamos hacia atrás en el tiempo serán *Descuentos* u *Operaciones de Actualización*.



En esta primera instancia nos vamos a focalizar en las operaciones de capitalización donde la persona invertirá el capital para ganar intereses y generará un monto.

Esquema de Capitalización



Una persona coloca un capital (**C)** durante un tiempo **(n)** y a una tasa **(i)**. Como está invirtiendo, es decir prestando su dinero, va a ganar un interés **(I)** calculado sobre su inversión. Podríamos decir que la base de cálculo para los intereses es el capital.

Los intereses se irán devengando constantemente pero se harán efectivos al finalizar el período en cuestión. Una vez que llegamos al final de este período se abren 2 posibilidades que determinan los 2 regímenes de Interés sobre los que vamos a trabajar.

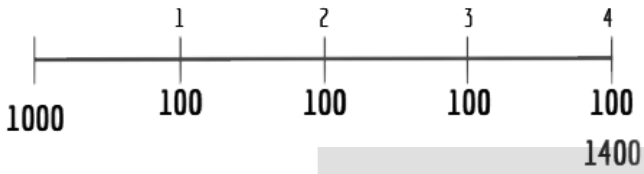
FORMADORES

RÉGIMEN DE INTERÉS SIMPLE (RIS):

Es el caso en el que los intereses generados en un período de tiempo "se apartan", para dejar invertido el mismo capital inicial en el período siguiente. Es decir, el capital inicial **(C)** es la base de cálculo para los intereses en todos los períodos.

Supongamos una colocación de $1.000 a una tasa del 10% por período (periódica) y durante 4 años.

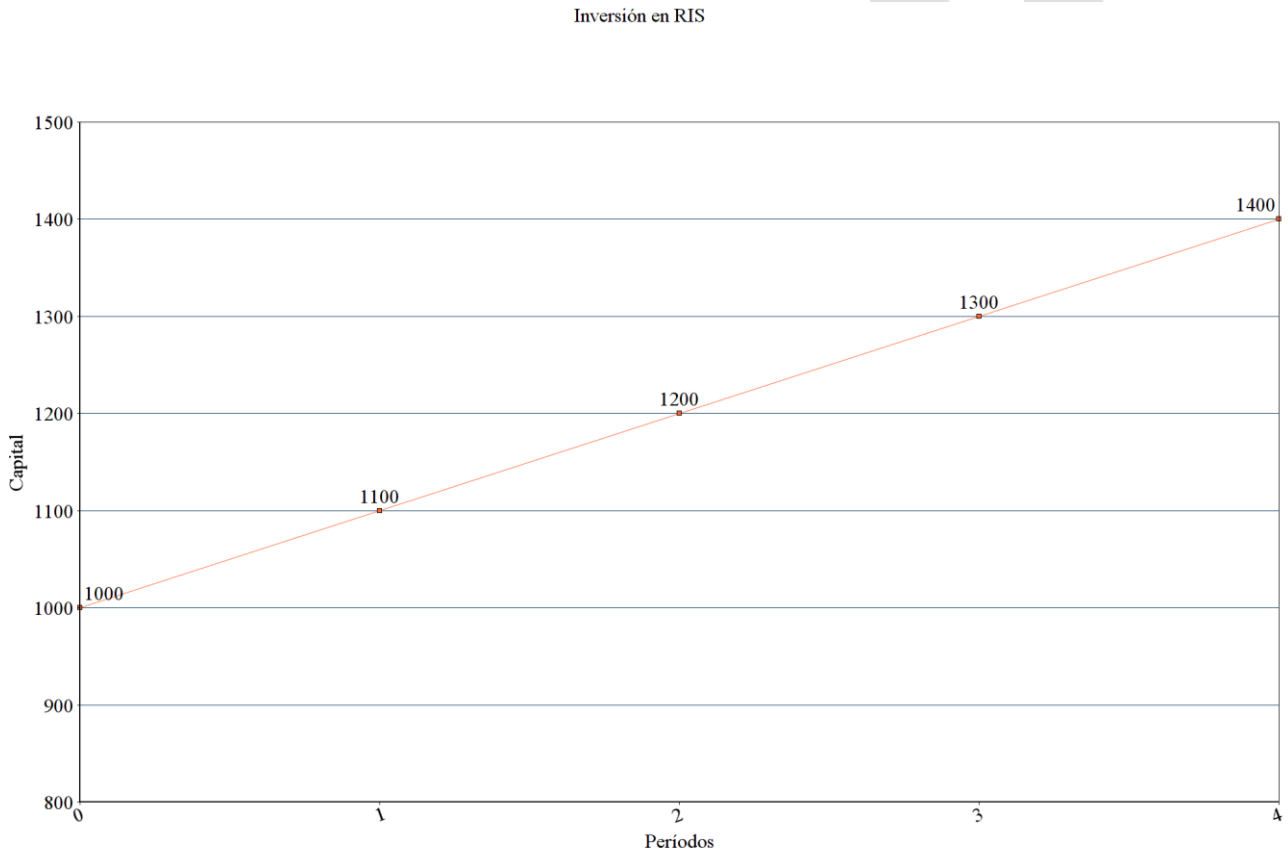
C = 1.000
i = 0,10
n = 4



• En el período "1" se generaron $100 de Intereses, los "apartamos" y se mantiene el capital inicial como la suma invertida para el siguiente período.

• Podemos decir que en todos los períodos, la base de cálculo para los intereses será el capital de **$1.000**

• El monto **(M)** formado será (1.000+100+100+100+100) = **$1.400**



Si consideramos una tasa de interés fija, entonces:

• El crecimiento del capital en régimen simple se produce de forma lineal. *(Progresión aritmética creciente)*

• Los intereses periódicos son constantes.

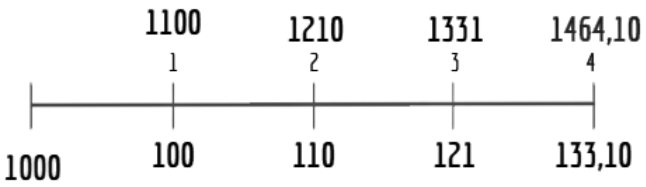
Material por: Walter Lande

RÉGIMEN DE INTERÉS COMPUESTO (RIC):

Es el caso en el que los intereses generados en un período "se agregan" al capital, es decir que se capitalizan, y se amplía la base de cálculo para los nuevos intereses del período siguiente.

Supongamos una colocación de $1.000 a una tasa del 10% por período (periódica) y durante 4 años.

C = 1.000
i = 0,10
n = 4

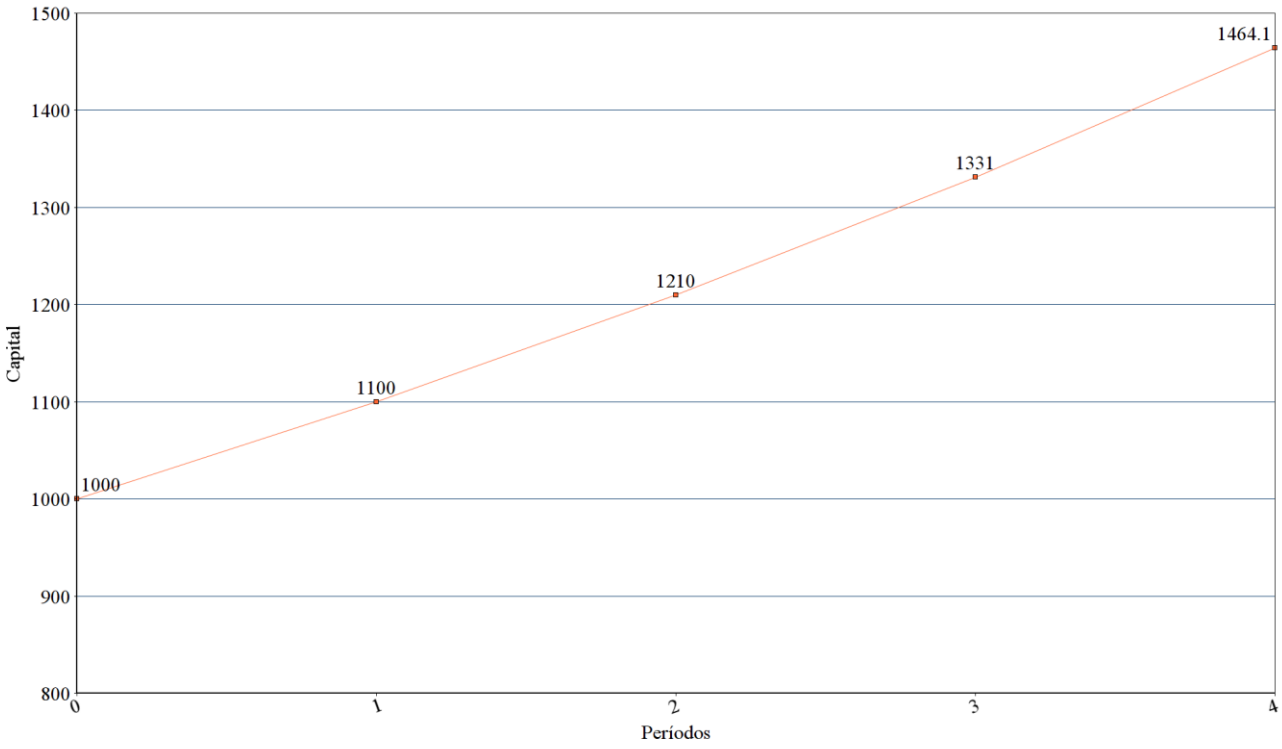


• En el período "1" se generaron $100 de Intereses, los "agregamos" al capital inicial. A partir de ese momento la suma invertida, y base de cálculo para los nuevos intereses, será **C + I**, es decir $1.000 + $100 = **$1.100**

• Podemos decir que en todos los períodos, la base de cálculo para los intereses será el capital más los intereses generados hasta ese momento.

• El monto **(M)** formado será (1.000+110+121+133,10) = **$1.464,10**

Inversión en RIC



Si consideramos una tasa de interés fija, entonces:

• El crecimiento del capital en régimen compuesto se produce de forma exponencial. *(Progresión geométrica creciente)*

• Los intereses periódicos son crecientes.

FÓRMULAS PARA RIS Y RIC:

En ambos casos vamos a estar trabajando sobre el capital **(C)**, aplicándole un factor que contemple los intereses que se generarán por la colocación.

Simplificadamente, podríamos decir que la diferencia entre ambas fórmulas se encuentra en el lugar del tiempo **(n)**.

$$Ms = C.(1 + i.n)$$

En el ejemplo previo: $Ms = 1000.(1 + 0{,}10.4)$

$$\boldsymbol{Ms = 1.400}$$

$$Mc = C.(1 + i)^n$$

En el ejemplo previo: $Mc = 1000.(1 + i)^4$

$$\boldsymbol{Mc = 1.464{,}10}$$

ENTRE 0 Y 1 PERÍODO:

$\text{Ms} = 1000.(1 + 0{,}10.0{,}5)$ $\qquad$ $Mc = 1000.(1 + 0{,}10)^{0{,}5}$

$\text{Ms} = \$1050$ $\qquad$ $Mc = \$1048{,}81$

El monto simple es mayor al compuesto.

EN 1 PERÍODO:

$\text{Ms} = 1000.(1 + 0{,}10.1)$ $\qquad$ $Mc = 1000.(1 + 0{,}10)^1$

$\text{Ms} = \$1100$ $\qquad$ $Mc = \$1100$

El monto simple es igual al compuesto.

EN MÁS DE 1 PERÍODO:

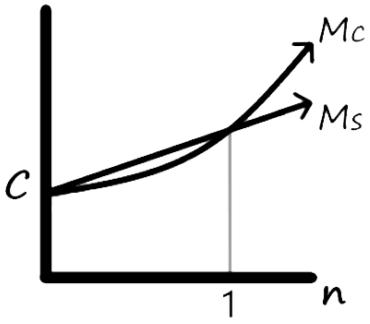
$\text{Ms} = 1000.(1 + 0{,}10.2)$ $\qquad$ $Mc = 1000.(1 + 0{,}10)^2$

$\text{Ms} = \$1200$ $\qquad$ $Mc = \$1210$

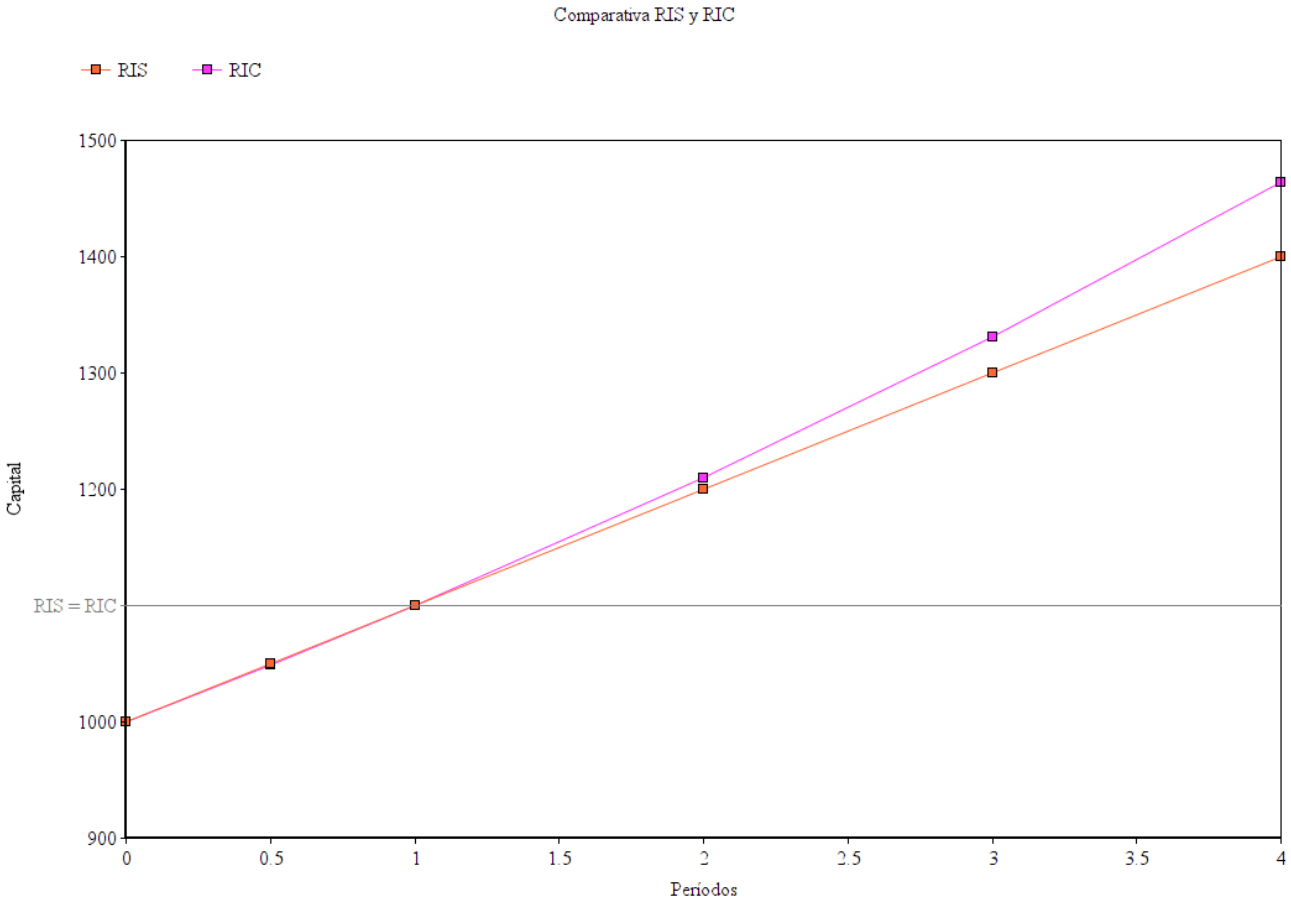
El monto simple es menor al compuesto.

FORMADORES

RELACIONES ENTRE RIS Y RIC:



- En un período de tiempo, el monto formado por ambos regímenes es el mismo.
- Antes de un período $Ms > Mc$
- Después de un período $Ms < Mc$
  (Los intereses capitalizados generan nuevos intereses)
- El crecimiento del monto en RIS es lineal y en RIC es exponencial.



FORMADORES

EN CUANTO AL TIEMPO (n):

El tiempo es relativo. Un año son 12 meses, o 6 bimestres, o 3 cuatrimestres, o 2 semestres…

En definitiva el tiempo al que hacemos referencia es el mismo solo que lo estamos midiendo en distintas unidades. Para los cálculos que se aplicarán en esta materia siempre vamos a expresar al tiempo en función del tiempo de la tasa de interés.

De esta manera si estamos hablando de una colocación anual y la tasa de interés aplicada es mensual, nuestro tiempo será el año expresado en meses: **n = 12**

Podríamos preguntarnos: ¿Cuántas veces cabe el tiempo de la tasa en el tiempo que estamos buscando?, y la respuesta sería *caben 12 meses en el año.*

Pero qué sucede si esta colocación anual no se realiza con una tasa mensual (tasa cada 30 días), sino con una tasa cada 9 días… (Sería un poco más que una tasa semanal). Acá también vale la pregunta mencionada previamente pero no es tan sencillo determinar las veces que caben 9 días en el año.

Para simplificar cualquier tipo de cálculo vamos a expresar a la **n** de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{n} = \frac{Tiempo\ de\ colocación}{Tiempo\ de\ tasa}$$

(Considerando la misma unidad de tiempo en numerador y denominador)

De esta manera nuestro ejemplo anterior se resume a la siguiente expresión: $\boldsymbol{n} = \frac{360}{9}$

La cantidad de veces que cabe el tiempo de tasa en el tiempo de colocación es exactamente $\frac{360}{9}$ y esta forma de expresar **(n)** servirá para cualquier tiempo de colocación y cualquier tiempo de tasa.

Aclaración:

¿Siempre consideramos al año de 360 días? **No.**
Dependiendo del criterio o convención esto puede variar de la siguiente manera:

- Año comercial o ideal: **360 días**
- Año calendario o real: **365 días**

Detalle importante:

Si el ejercicio pide la utilización del año calendario, la pregunta "Cuántos meses caben dentro del año" no se responde con 12. ¿Por qué?

Porque… $\boldsymbol{n} = \frac{365}{30} \rightarrow 12{,}166666$

Conclusión:

Utilizar esta forma de expresión para referirnos al tiempo **(n)** contempla muchas de las posibles consideraciones y variantes que podrían presentarse.

Material por: Walter Lande

EN CUANTO A LA TASA DE INTERÉS (i):

Sabemos que se puede operar en interés simple (RIS) y en interés compuesto (RIC), pero nos falta definir las tasas de interés que vamos a utilizar en la materia:

TASA	NOMBRE	RÉGIMEN	ENUNCIADO	FÓRMULA DE MONTO
i	Periódica	Simple	Tasa anual nominal.	$C.(1+i.n)$
i	Periódica	Compuesto	Tasa anual efectiva.	$C.(1+i)^n$
j	Subperiódica	Compuesto	Tasa anual con *capitalización* mensual.	$C.(1+\frac{j}{m})^{m.n}$
δ	Instantánea	Compuesto	Tasa anual con capitalización continua o tasa instantánea.	$C.e^{\delta.n}$

TASAS PERIÓDICAS

Son aquellas tasas que enuncian solo su unidad de tiempo.
Estas pueden trabajar tanto en RIS como en RIC.

Por ejemplo:

- Tasa anual
- Tasa semestral
- Tasa mensual

TASAS SUBPERIÓDICAS

Son aquellas tasas nominales que *capitalizan* intereses en un subperíodo de su unidad de tiempo.
Estas trabajan en RIC, ya que la acción de capitalizar no existe en RIS.

Por ejemplo:

- Tasa anual con capitalización mensual
- Tasa semestral con capitalización mensual
- Tasa mensual con capitalización diaria

*Frecuencia de capitalización **(m)**:*

Podemos ver en la fórmula que aparece una "*m*", debajo de la tasa de interés y en el exponente junto al tiempo. Hace referencia a la cantidad de capitalizaciones que habrá dentro de la unidad de tiempo de la tasa.

En caso de tener una tasa nominal anual con capitalización mensual, diríamos que habrá **12** capitalizaciones en el año. Pero lo vamos a expresar de manera similar al tiempo **(n)**, porque si tuviéramos una tasa nominal anual con capitalización cada 25 días ya no sería tan sencillo de pensarlo.

Para simplificar cualquier tipo de cálculo vamos a expresar a la **m** de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{m} = \frac{Tiempo\ de\ tasa}{Tiempo\ de\ capitalización}$$

(Considerando la misma unidad de tiempo en numerador y denominador)

Material por: Walter Lande

FORMADORES

De esta manera nuestro ejemplo anterior se resume a la siguiente expresión: $\boldsymbol{m} = \frac{360}{25}$

La cantidad de veces que se capitalizará dentro de la unidad de tiempo de tasa es exactamente $\frac{360}{25}$ y esta forma de expresar **(m)** servirá para cualquier frecuencia de capitalización y cualquier tiempo de tasa.

- ✓ *La aclaración sobre año comercial/calendario y la conclusión expuesta para **(n)** se aplica aquí también.*

Caso especial → Ejemplo: "Tasa nominal anual con capitalización anual"

Existe el caso de tasas cuya unidad de tiempo y su período de capitalización coinciden.
Estas poseen $m = 1$, ya que tendremos el mismo valor en el numerador y denominador… $m = \frac{360}{360}$

Cuando esto es así llamaremos a esa tasa i_m y funcionará como tasa periódica en RIC → $C.(1 + i_m)^n$

TASAS INSTANTÁNEAS

Son aquellas tasas donde las capitalizaciones suceden instante a instante, coincide generación con incorporación, entonces la frecuencia de capitalización tiende a infinito ($m \to \infty$).

Por ejemplo:

• Tasa anual con capitalización continua
• Tasa instantánea semestral

Aclaración:

La letra **"e"** que aparece en la fórmula corresponde a un número conocido como Número de Euler. Es la base de los llamados logaritmos naturales y tiene un valor aproximado de 2,718. Aparece en los procesos que presentan crecimiento exponencial, como es el caso de los intereses en RIC.

TASA EFECTIVA

En las operaciones financieras de capitalización, se pacta una tasa periódica **nominal** que generalmente no coincide con la tasa periódica **efectiva**, la que expresa el verdadero rendimiento periódico del capital invertido, cualquiera sea la forma de colocación o capitalización existente. Es una tasa periódica que opera a interés compuesto y de manera vencida.

En una situación de capitalización periódica, la tasa nominal es al mismo tiempo tasa efectiva. Por esto en el gráfico anterior colocamos $C.(1 + i)^n$ en vez de $C.(1 + j)^n$.

Debido a que las tasas con capitalización subperiódica generan más intereses que las capitalizaciones periódicas, entonces siempre en esos casos ($i > j$). Cuantos más intereses se generen por una forma de capitalización, más rendimiento producirá la colocación y la tasa efectiva resultante será cada vez más grande hasta alcanzar su valor máximo en la capitalización continua.

La tasa efectiva en operaciones a interés simple es variable y decreciente. Esto se debe a que en RIS el capital productivo es constante, entonces el interés que también es constante, y este valor periódico fijo *en relación al dinero generado hasta ese momento* representa una porción cada vez menor.

En el ejemplo de la pág. 2, podemos ver que siempre se ganan $100 pero no es lo mismo lo que representa ese interés en todos los períodos:

Período 1: $\frac{100}{1000} \to 10\%$

Período 2: $\frac{100}{1100} \to 9{,}090909\%$

Período 3: $\frac{100}{1200} \to 8{,}333333\%$

Período 4: $\frac{100}{1300} \to 7{,}692307\%$

Apunte – Matemática Financiera

CONVERSIÓN DE TASAS

Existen tasas NOMINALES y tasas EFECTIVAS.

Existe el enfoque de PROPORCIONALIDAD y de EQUIVALENCIAS.

La tasa NOMINAL es un porcentaje de referencia que se asocia a una unidad de tiempo.

Por ejemplo: TNA *(Tasa Nominal Anual)*

Si hago una inversión con una TNA del 24% significa que se paga ese porcentaje en el año.

Esta tasa es fija pero si quisiera hacer una operación por una fracción del tiempo, puedo fraccionar la tasa.

$$\text{Anual} \rightarrow 24\%$$
$$\text{Semestral} \rightarrow 12\%$$
$$\text{Mensual} \rightarrow 2\%$$

Las tasas nominales se convierten por el enfoque de PROPORCIONALIDAD, que supone constante a la tasa nominal y la "fracciona o proporciona" al tiempo que sea necesario. Para calcular la nueva tasa se aplica una regla de 3 simple entre el tiempo de la tasa y su porcentaje.

"Mitad de tiempo, mitad de tasa; Doble de tiempo, doble de tasa"

Este porcentaje de referencia no determina el verdadero rendimiento de una inversión. Si capitalizáramos mensualmente la tasa del 2% obtenida en la conversión, el rendimiento anual sería mayor al 24% debido a la incorporación mensual de intereses al capital productivo.

$$1000\,.\,(1+0{,}02)^{12} = \$1268{,}24$$

Un 26,82% más al inicio, no 24%.

Este rendimiento real que surge de la colocación se llama TASA EFECTIVA.

En este caso TEA: *(Tasa Efectiva Anual)*

Dependiendo de la forma en que se capitalice, la tasa efectiva puede variar. Ya vimos que cuando aumenta la frecuencia de capitalización (m) aumenta el monto, entonces estaría aumentado el rendimiento, es decir la tasa efectiva.

Las tasas efectivas se convierten por el enfoque de EQUIVALENCIAS, que supone constante el rendimiento generado por una colocación. Dos tasas son equivalentes cuando ambas tienen el mismo rendimiento, es decir que forman el mismo monto.

La conversión se da, justamente, igualando montos. Partiendo de una tasa conocida y buscando una tasa a conocer.

Podemos elegir cualquier tiempo para la conversión porque si son tasas equivalentes rinden lo mismo en todo momento.

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}$$

$$\mathrm{C}.(1+\checkmark)^{n} = \mathrm{C}.(1+?)^{n}$$

Material por: Walter Lande